

LA FACTORISATION

(3UAA5 : outils algébriques)

1. Factorise par mise en évidence

a) $12a - 3b = 3(4a - b)$

b) $2ab - 2a = 2a(b - 1)$

c) $12cd^2 + 8c = 4c(3d^2 + 2)$

d) $56a^3b - 48ab = 8ab(7a^2 - 6)$

e) $8a^2 - 12a^3 - 4a = 4a(2a - 3a^2 - 1)$

f) $-7a^2 + 7a = 7a(-a + 1)$

g) $a^9 + a^6 + a^3 = a^3(a^6 + a^3 + 1)$

h) $2b.(c + d) - 3.(c + d) = (c + d)(2b - 3)$

i) $(a - 3).(x + 4) + (5 - x).(a - 3) = (a - 3)[(x + 4) + (5 - x)]$
 $= (a - 3)(x + 4 + 5 - x)$
 $= 9(a - 3)$

j) $-4.(2x + y) + 5x.(y + 2x) = (2x + y)(-4 + 5x)$

k) $5x.(a - b) - 3y.(b - a) = 5x(a - b) + 3y(a - b)$
 $= (a - b)(5x + 3y)$

l) $(2a - 3).(5a + 3) + (2a + 7).(3 - 2a) = (2a - 3)(5a + 3) - (2a + 7)(2a - 3)$
 $= (2a - 3)[(5a + 3) - (2a + 7)]$
 $= (2a - 3)(5a + 3 - 2a - 7)$
 $= (2a - 3)(3a - 4)$

m) $(3a + 1).(x - 2) + (2 - x).(a + 5) = (3a + 1)(x - 2) - (x - 2)(a + 5)$
 $= (x - 2)[(3a + 1) - (a + 5)]$
 $= (x - 2)(3a + 1 - a - 5)$
 $= (x - 2)(2a - 4)$
 $= 2(x - 2)(a - 2)$

n) $5.(a + b) - 3.(a + b)^2 = (a + b)[5 - 3(a + b)]$

$= (a + b)(5 - 3a - 3b)$

⇒ pas obligatoire car pas de possibilité de réduire des termes semblables.

o) $3.(x + y)^2 - 4.(x + y)^3 = (x + y)^2[3 - 4(x + y)]$

$= (x + y)^2(3 - 4x - 4y)$

⇒ pas obligatoire car pas de possibilité de réduire des termes semblables.

p) $7.(x - y)^2 - (x - y) + 3x.(x - y) = (x - y)[7(x - y) - 1 + 3x]$

$= (x - y)(7x - 7y - 1 + 3x)$

⇒ obligatoire car possibilité de réduire des termes semblables.

$= (x - y)(10x - 7y - 1)$

2. Factorise en utilisant le produit remarquable $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

a) $x^2 - 9 = (x - 3) (x + 3)$

b) $25x^2 - 36y^2 = (5x - 6y) (5x + 6y)$

c) $\frac{a^2}{16} - b^2 = \left(\frac{a}{4} - b\right) \left(\frac{a}{4} + b\right)$

d) $16a^4 - b^4 = (4a^2 - b^2) (4a^2 + b^2)$
 $= (2a - b) (2a + b) (4a^2 + b^2)$

e) $625x^4y^4 - 16 = (25x^2y^2 - 4) (25x^2y^2 + 4)$
 $= (5xy - 2) (5xy + 2) (25x^2y^2 + 4)$

f) $2a^2 - 2b^2 = 2 (a^2 - b^2)$
 $= 2 (a - b) (a + b)$

g) $a^3 - a = a (a^2 - 1)$
 $= a (a - 1) (a + 1)$

h) $32a^3b - 50ab^3 = 2ab (16a^2 - 25b^2)$
 $= 2ab (4a - 5b) (4a + 5b)$

i) $(a - 1)^2 - 1 = [(a - 1) - 1] [(a - 1) + 1]$
 $= (a - 1 - 1) (a - 1 + 1)$
 $= a (a - 2)$

j) $4x^2 - (a - b)^2 = [2x - (a - b)] [2x + (a - b)]$
 $= (2x - a + b) (2x + a - b) \Rightarrow$ pas obligatoire car pas de possibilité de réduire des termes semblables.

k) $\frac{ab^2}{98} - \frac{b^3}{72} = \frac{b^2}{2} \left(\frac{a}{49} - \frac{b}{36}\right)$  Pas de produit remarquable car ce n'est pas une différence de deux carrés !

Il s'agit d'une erreur dans l'énoncé qui devait être $\frac{a^2b}{98} - \frac{b^3}{72}$; la solution serait alors $\frac{b}{2} \left(\frac{a^2}{49} - \frac{b^2}{36}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{a}{7} - \frac{b}{6}\right) \left(\frac{a}{7} + \frac{b}{6}\right)$

l) $(3a + 5)^2 - (2a - 4)^2 = [(3a + 5) - (2a - 4)] [(3a + 5) + (2a - 4)]$
 $= (3a + 5 - 2a + 4) (3a + 5 + 2a - 4)$
 $= (a + 9) (5a + 1)$

m) $(2b + 1)^2 - (3 - b)^2 = [(2b + 1) - (3 - b)] [(2b + 1) + (3 - b)]$
 $= (2b + 1 - 3 + b) (2b + 1 + 3 - b)$
 $= (3b - 2) (b + 4)$

n) $4.(x + y)^2 - 36y^2 = [2(x + y) - 6y] [2(x + y) + 6y]$
 $= (2x + 2y - 6y) (2x + 2y + 6y) \Rightarrow$ obligatoire car possibilité de réduire des termes semblables.
 $= (2x - 4y) (2x + 8y)$
 $= 2(x - 2y) 2(x + 4y)$
 $= 4 (x - 2y) (x + 4y)$

o) $16.(3x + 1)^2 - 25.(2x - 3)^2 = [4(3x + 1) - 5(2x - 3)] [4(3x + 1) + 5(2x - 3)]$
 $= (12x + 4 - 10x + 15) (12x + 4 + 10x - 15) \Rightarrow$ obligatoire car possibilité de réduire des termes semblables.
 $= (2x + 19) (22x - 11)$
 $= 11 (2x + 19) (2x - 1)$

p) $-121a^2 + (6b - a)^2 = [(6b - a) - 11a] [(6b - a) + 11a]$
 $= (6b - a - 11a) (6b - a + 11a)$
 $= (6b - 12a) (6b + 10a)$
 $= 6(b - 2a) 2(3b + 5a)$
 $= 12 (b - 2a) (3b + 5a)$

3. Factorise en utilisant le produit remarquable $a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a \pm b)^2$

a) $25 + 10b + b^2 = (5 + b)^2$

b) $16a^2 - 8a + 1 = (4a - 1)^2$

c) $\frac{a^2}{9} + \frac{2ab}{15} + \frac{b^2}{25} = \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{5}\right)^2$

d) $a^4b^2 + 81x^2 - 18a^2bx = (a^2b - 9x)^2$

e) $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2$
 $= [(a - 1)(a + 1)]^2$

f) $18b^2 - 96b + 128 = 2(9b^2 - 48b + 64)$
 $= 2(3b - 8)^2$

q) $a^2b - ab^2 + b^3 = b(a^2 - ab + b^2)$  Pas de produit remarquable car on n'a pas le double produit !

g) $\frac{x^2}{16} + 9y^2 - \frac{3xy}{2} = \left(\frac{x}{4} - 3y\right)^2$

h) $36 + 4a^2b^2 - 24ab = 4(9 + a^2b^2 - 6ab)$
 $= 4(3 - ab)^2$

i) $0,01x^2 + 0,04xy + 0,04y^2 = (0,1x + 0,2y)^2$
Ou $= 0,01(x^2 + 4xy + 4y^2) = 0,01(x + 2y)^2$
Ou $= \left(\frac{x^2}{100} + \frac{4xy}{100} + \frac{4y^2}{100}\right) = \left(\frac{x^2}{100} + \frac{xy}{25} + \frac{y^2}{25}\right) = \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{5}\right)^2$

4. Exercices récapitulatifs : factorise au maximum

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x^2 - 12x + 18 &= 2(x^2 - 6x + 9) \\ &= 2(x - 3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 49a^4 - 1 = (7a^2 - 1)(7a^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (3a + 2) \cdot (2x - y) - (a - 5) \cdot (2x - y) &= (2x - y) [(3a + 2) - (a - 5)] \\ &= (2x - y) (3a + 2 - a + 5) \\ &= (2x - y) (2a + 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (3x + 2)^2 - 9 &= [(3x + 2) - 3] [(3x + 2) + 3] \\ &= (3x + 2 - 3) (3x + 2 + 3) \\ &= (3x - 1) (3x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^5 - 16xy^4 &= x(x^4 - 4y^4) \\ &= x(x^2 - 2y^2)(x^2 + 2y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (a - 4y) \cdot (x - b) + (2a - y) \cdot (b - x) &= (a - 4y)(x - b) - (2a - y)(x - b) \\ &= (x - b) [(a - 4y) - (2a - y)] \\ &= (x - b) (a - 4y - 2a + y) \\ &= (x - b) (-a - 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } (3x - 1)^2 - (2 - 5x)^2 &= [(3x - 1) - (2 - 5x)] [(3x - 1) + (2 - 5x)] \\ &= (3x - 1 - 2 + 5x) (3x - 1 + 2 - 5x) \\ &= (8x - 3) (-2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } (5a - 2b)^2 - (2b - 5a) &= (5a - 2b)^2 + (5a - 2b) \\ &= (5a - 2b) [(5a - 2b) + 1] \end{aligned}$$

$$\text{i) } x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$$

$$\begin{aligned} \text{j) } a^4b^4 - c^8 &= (a^2b^2 - c^4)(a^2b^2 + c^4) \\ &= (ab - c^2)(ab + c^2)(a^2b^2 + c^4) \end{aligned}$$